Ciągi liczbowe – granica ciągu liczbowego

Granica właściwa ciągu

Definicja 5. Przedział $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ nazywamy *otoczeniem* punktu x_0 o promieniu $\varepsilon > 0$ i oznaczamy symbolem $U(x_0, \varepsilon)$.

Łatwo stwierdzić, że punkt b należy do otoczenia punktu x_0 o promieniu $\varepsilon > 0$, jeżeli spełniona jest nierówność $|b - x_0| < \varepsilon$.

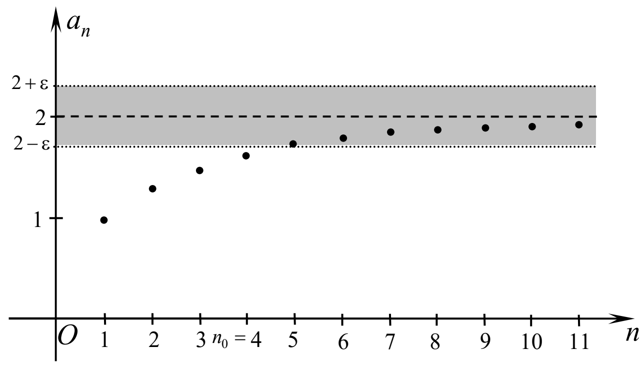
Definicja 6. Ciąg liczbowy (a_n) ma *granicę* g, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy w dowolnym otoczeniu punktu g znajdują się prawie wszystkie (wszystkie z wyjątkiem skończonej ilości) wyrazu tego ciągu.

Symbolicznie powyższą definicję możemy zapisać następująco:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \iff \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n>n_0}\, |a_n - g| < \varepsilon.$$

Ciągi, które mają granicę skończoną (inaczej właściwą) nazywamy *ciągami zbieżnymi*, a pozostałe – *ciągami rozbieżnymi*.

Na rysunku 2 można znaleźć ilustrację graficzną faktu, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+1} = 2$.



Rys. 2. Ilustracja pojęcia granicy ciągu

Na rysunku widzimy, że niezależnie, jak małe ε weźmiemy, to i tak znajdziemy takie n_0 (na rysunku $n_0 = 4$), że wszystkie kolejne (dla $n > n_0$)

wyrazy ciągu (a_n) będą leżały w otoczeniu (pasie) o środku w punkcie 2 i promieniu ε.

Podamy teraz kilka ważniejszych twierdzeń dotyczących ciągów zbieżnych.

Twierdzenie 1. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, to ma on tylko jedną granicę.

Twierdzenie 2. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, to jest on ograniczony.

Uwaga. Z twierdzenia 2 wynika fakt, że jeżeli ciąg (a_n) nie jest ograniczony, to ciąg ten jest rozbieżny. Przykładowy ciąg $b_n = 5 - 2n$ z przykładu 1 jest rozbieżny ponieważ, co łatwo stwierdzić, nie jest on ograniczony.

Twierdzenie 3. Jeżeli ciąg (a_n) jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny.

Twierdzenie 4. Ciąg stały o wyrazie ogólnym $a_n = c$ jest zbieżny do c, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

Twierdzenie 5. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, gdzie $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ (b_n \neq 0 \ \text{ i } \ b \neq 0)$.

Twierdzenie 6 (*o trzech ciągach*).

Jeżeli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunki:

1. $\exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n>n_0}\ a_n \le b_n \le c_n$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$,

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Ciągi rozbieżne do nieskończoności

Z poprzedniego rozdziału wiemy, że ciągi rozbieżne są to ciągi, które nie posiadają granicy skończonej. Wśród takich ciągów na szczególną uwagę zasługują ciągi rozbieżne do nieskończoności (mające granice niewłaściwe $-\infty$ lub $+\infty$).

Definicja 7. Mówimy, że ciąg (a_n) jest:

- *rozbieżny do* $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie wybranej liczby A, tj.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall_A \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n>n_0}\ a_n > A\,,$$
- *rozbieżny do* $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są mniejsze od dowolnie wybranej liczby A, tj.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall_A \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n>n_0}\ a_n < A\,.$$

Nie będziemy podawać tutaj twierdzeń dotyczących ciągów rozbieżnych do nieskończoności. Wiele spośród nich związanych jest z działaniami arytmetycznymi na granicach, których interpretacja na ogół nie stanowi problemu. Ilustracją wybranych twierdzeń, z jednoczesnym symbolicznym zapisem wykonywanych działań (w nawiasach kwadratowych), niech będą następujące przykłady:

$$\lim_{n\to\infty}(5-2n) = [5-2\cdot(+\infty)] = [5-\infty] = -\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+n) = [(+\infty)^2+(+\infty)] = [+\infty+\infty] = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-n^3-\frac{n}{2}\right) = \left[-(+\infty)^3-\frac{+\infty}{2}\right] = [-\infty-\infty] = -\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = \left[\frac{3}{+\infty}\right] = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1-n^2} = \left[\frac{2}{1-(+\infty)^2}\right] = \left[\frac{2}{1-\infty}\right] = \left[\frac{2}{-\infty}\right] = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-5}{\sqrt{n}} = \left[\frac{-5}{\sqrt{+\infty}}\right] = \left[\frac{-5}{+\infty}\right] = 0.$$

Patrząc na trzy ostatnie przykłady należy zapamiętać, że $\left[\frac{a}{\pm\infty}\right] = 0,$ gdzie a jest dowolną stałą lub bardziej ogólnie – granicą właściwą pewnego ciągu.

Symbole nieoznaczone oraz ważniejsze granice

Nie zawsze przy obliczaniu granic otrzymujemy wyrażenia, których interpretacja jest tak oczywista, jak w przykładach z poprzedniego rozdziału. Przeanalizujmy następujący przykład:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3n}{n^2+2} = \left[\frac{-3\cdot(+\infty)}{(+\infty)^2+2}\right] = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right].$$

W tym przypadku, bez wykonania dalszych przekształceń, trudno określić co będzie granicą tego ciągu. Otrzymany symbol $\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]$, jest jednym z tzw. *symboli nieoznaczonych*. Do symboli (wyrażeń) nieoznaczonych zaliczamy:

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ \left[\frac{0}{0}\right],\ [0\cdot\infty],\ [\infty-\infty],\ \left[1^{\infty}\right],\ \left[0^{0}\right],\ \left[\infty^{0}\right].$$

W kolejnym rozdziale omówione zostaną pewne sposoby postępowania z tego typu wyrażeniami.

Dodatkowo przy obliczaniu granic ciągów często będziemy korzystać ze znanych granic:

(1) $\forall_{a>0}\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{gdy } -1 < q < 1 \\ 1, & \text{gdy } \quad q = 1, \\ +\infty, & \text{gdy } \quad q > 1 \end{cases}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, lub bardziej ogólnie

(5) Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+a_n\right)^{\frac{1}{a_n}} = \mathrm{e}$.

Przykłady obliczania granic

Przy obliczeniu granic ciągów stosujemy różne przekształcenia zależne od typu ciągu z jakim mamy do czynienia. Wybrane metody omówimy na przykładach.

Przykład 4. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3+n+2}{1-2n^3}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+3)^2}{1-3n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n+3}}{\sqrt{4n^3+1}+n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^n+4^{n+1}}{5\cdot 4^n+3^n}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n} - n\right)$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{n}\right)^{-n}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+2}\right)^{1-2n}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}$.

Rozwiązanie.

a) Łatwo stwierdzić, że mamy tutaj do czynienia z symbolem nieoznaczonym $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. W przypadku ciągów o tego typu wyrazach ogólnych, postępujemy tak, że licznik i mianownik dzielimy przez najwyższą potęgę zmiennej n występującą w mianowniku, a więc tutaj n^3. Otrzymamy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n+2}{1-2n^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^3}{n^3}+\frac{n}{n^3}+\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^3}-\frac{2n^3}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^3}-2}=$$

$$=\left[\frac{3+0+0}{0-2}\right]=-\frac{3}{2}.$$

b) Postępujemy podobnie, jak w przykładzie a):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^2}{1-3n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+12n+9}{1-3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2}{n}+\frac{12n}{n}+\frac{9}{n}}{\frac{1}{n}-\frac{3n}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+12+\frac{9}{n}}{\frac{1}{n}-3}=\left[\frac{+\infty+12+0}{0-3}\right]=\left[\frac{+\infty}{-3}\right]=-\infty\ .$$

c) Tutaj można przyjąć (pamiętając jednak o tym, że $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$), że najwyższą potęgą n w mianowniku jest $n^{\frac{3}{2}}$. Oczywistym jest również fakt, że wnosząc wyrażenie n^r pod pierwiastek określonego stopnia musimy to wyrażenie podnieść do takiej potęgi, jaki jest stopień pierwiastka. Możemy zatem zapisać:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n+3}}{\sqrt{4n^3+1}+n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{\frac{n}{n^6}+\frac{3}{n^6}}}{\sqrt{\frac{4n^3}{n^3}+\frac{1}{n^3}}+\frac{n}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{n^5}+\frac{3}{n^6}}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^3}}+\frac{1}{\sqrt{n}}}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt[4]{0+0}}{\sqrt{4+0}+0}\right]=0.$$

d) Sposób postępowania jest analogiczny, jak w powyższych przykładach, przy czym tutaj licznik i mianownik podzielimy przez potęgę o najwyższej podstawie występującą w mianowniku, tj. 4^n. Następnie skorzystamy ze wzoru (3):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^n+4^{n+1}}{5\cdot 4^n+3^n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^n+4\cdot 4^n}{5\cdot 4^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\frac{2^n}{4^n}+4\cdot\frac{4^n}{4^n}}{5\cdot\frac{4^n}{4^n}+\frac{3^n}{4^n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+4}{5+\left(\frac{3}{4}\right)^n}\overset{(5.3)}{=}\left[\frac{3\cdot 0+4}{5+0}\right]=\frac{4}{5}.$$

e) Jeżeli w wyrazie ogólnym ciągu występuje **różnica** dwóch wyrażeń, z których przynajmniej jedno jest pierwiastkiem kwadratowym, to aby obliczyć granicę takiego ciągu, do wyrażenia zawierającego pierwiastek stosujemy wzór:

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}.$$

Dodatkowo w naszym przykładzie będziemy jeszcze musieli zastosować sposób postępowania znany z poprzednich przykładów:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}\;-\;n\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+3}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3}+n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}=\left[\frac{3}{\sqrt{1+0}+1}\right]=\frac{3}{2}.$$

Uwaga. Jeżeli w wyrazie ogólnym ciągu, którego granicę chcemy obliczyć, występuje różnica dwóch wyrażeń, z których przynajmniej jedno jest pierwiastkiem trzeciego stopnia to wówczas stosujemy następujący wzór:

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}.$$

f) Zauważmy, że w nawiasie mamy $1+a_n$, gdzie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Przekształcamy wyraz ogólny do takiej postaci, aby uzyskać w nim wyrażenie $\left(1+a_n\right)^{\frac{1}{a_n}}$, a następnie korzystamy z faktu (5):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{-n} = \left[1^{-\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^{-4} = \mathrm{e}^{-4} = \frac{1}{\mathrm{e}^4},$$

g) Tu również będziemy korzystać z własności (5), przy czym najpierw wyraz ogólny naszego ciągu musimy sprowadzić do postaci zawierającej wyrażenie $\left(1+a_n\right)^{\frac{1}{a_n}}$, gdzie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Wykonujemy przekształcenia

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^{1-2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2-3}{n^2+2}\right)^{1-2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n^2+2}\right)^{1-2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{n^2+2}\right)^{\frac{n^2+2}{-3}}\right]^{\frac{-3}{n^2+2}\cdot(1-2n)} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{n^2+2}\right)^{\frac{n^2+2}{-3}}\right]^{\frac{6n-3}{n^2+2}} =$$

Wykonujemy pomocnicze obliczenia: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-3}{n^2+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{6}{n}-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} = 0$

$$= \mathrm{e}^0 = 1.$$

h) Skorzystamy tutaj z twierdzenia o trzech ciągach. Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest nierówność:

$$7^n < 3^n + 5^n + 7^n < 7^n + 7^n + 7^n$$

i dalej

$$\sqrt[n]{7^n} < \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n} < \sqrt[n]{3\cdot 7^n},$$

czyli

$$7 < \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n} < 7\sqrt[n]{3}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} 7 = 7$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} 7\sqrt[n]{3} = [7\cdot 1] = 7$ (wzór (1)), zatem na mocy twierdzenia 6

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}=7.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

8. $a_n=\dfrac{2n^2+3n}{n^2-4}$,

9. $a_n=\dfrac{n^3-n}{-2n^4+n-5}$,

10. $a_n=\dfrac{(n+2)^2}{1-3n-n^3}$,

11. $a_n\dfrac{1-2n^3}{n^2-n+2}$,

12. $a_n=\dfrac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}$,

13. $a_n=\dfrac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$,

14. $a_n=\dfrac{\sqrt[3]{n^2+3}}{n+4}$,

15. $a_n=\dfrac{3n^2-1}{n+\sqrt{n^3+2}}$,

16. $a_n=\dfrac{\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt[3]{8n^3+1}+3n}$,

17. $a_n=\dfrac{n\sqrt[3]{8n}}{2n+\sqrt[3]{n^4+3n-1}}$,

18. $a_n=\dfrac{1+2+3+...+n}{2+3n^2}$,

19. $a_n=\dfrac{2+4+6+...+2n}{(n+1)^3}$,

20. $a_n=n-\sqrt{n^2+4}$,

21. $a_n=\dfrac{2}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$,

22. $a_n=3n-\sqrt{9n-2}$,

23. $a_n=\dfrac{3}{\sqrt{4n^2+n}-2n}$,

24. $a_n=\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2}$

25. $a_n=\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$,

26. $a_n=\dfrac{3^{n+2}-2}{3^n+2^n}$,

27. $a_n=\dfrac{5\cdot 2^n+4^{n+1}}{2^{2n}+3^{n+2}}$,

28. $a_n=\dfrac{\sqrt[n]{n^5}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1+\sqrt[n]{3}}$,

29. $a_n=\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$,

30. $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$,

31. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n}$,

32. $a_n = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{-4n}$,

33. $a_n = \left(\frac{n}{n+3}\right)^{1-2n}$,

34. $a_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}$,

35. $a_n = \left(\frac{n^2-5}{n^2+2}\right)^{2-n}$,

36. $a_n = \sqrt[n]{6^n + 5^n}$,

37. $a_n = \sqrt[n]{\mathrm{e}^n + 3^n + \pi^n}$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch